

CAPITOLUL 1. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE SPAȚIILOR TOPOLOGICE

1.1. Definiția spațiului topologic. Exemple. Noțiunea de vecinătate și de punct interior pentru o mulțime

Definiția 1.1.1. Fie X o mulțime nevidă. O familie τ de submulțimi ale lui X se numește *topologie* dacă satisface condițiile:

1⁰) $\emptyset, X \in \tau$;

2⁰) Pentru orice familie de indici I cu $D_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in I$, avem: $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha \in \tau$;

3⁰) Dacă $A, B \in \tau$, atunci $A \cap B \in \tau$.

Elementele lui τ se numesc *mulțimi deschise*.

Observația 1.1.2.

a) Din condiția 3⁰) rezultă imediat, prin inducție, că pentru orice familie finită $(D_i)_{1 \leq i \leq n}$ cu $D_i \in \tau, \forall i = \overline{1, n}$, avem:

$$\bigcap_{i=1}^n D_i \in \tau.$$

b) După cum vom vedea, intersecția unei familii infinite de mulțimi deschise nu este, în general, o mulțime deschisă.

Exemplul 1.1.3. Fie $X = \mathbb{R}$. Definem pe \mathbb{R} următoarea topologie τ : $A \in \tau$ dacă este îndeplinită una din condițiile:

i) $A = \emptyset$;

ii) Dacă $A \neq \emptyset$, atunci $\forall x \in A, \exists r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subset A$.

Să verificăm cele trei condiții din definiția unei topologii:

1) $\emptyset, X \in \tau$, evident;

2) Fie $(D_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \tau$ și fie $x \in \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$.

Atunci $\exists \alpha_0 \in I$ cu $x \in D_{\alpha_0}$, deci $\exists r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subset D_{\alpha_0}$, de unde deducem că $(x-r, x+r) \subset \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$, adică $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha \in \tau$.

3) Fie $A, B \in \tau$. Dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci $A \cap B \in \tau$.

Presupunem că $A \cap B \neq \emptyset$ și fie $x \in A \cap B$.

$x \in A$ și $A \in \tau \Rightarrow \exists r_1 > 0$ astfel încât $(x - r_1, x + r_1) \subset A$.

$x \in B$ și $B \in \tau \Rightarrow \exists r_2 > 0$ astfel încât $(x - r_2, x + r_2) \subset A$.

Fie $r = \min(r_1, r_2)$. Atunci

$(x - r, x + r) \subset A$, $(x - r, x + r) \subset B$, deci $(x - r, x + r) \subset A \cap B$ de unde deducem că $A \cap B \in \tau$.

Exemplul 1.1.4. Fie $X = \mathbb{C}$; definim pe \mathbb{C} topologia τ în felul următor: $A \in \tau$ dacă

i) $A = \emptyset$ sau ii) dacă $A \neq \emptyset$, $\forall z \in A$, $\exists r > 0$ astfel încât $\forall y \in \mathbb{C}$ cu $|y - z| < r$, avem $y \in A$.

Se verifică, similar cu exemplul 1.1.3., că mulțimile $A \in \tau$ astfel definite, satisfac condițiile de definiție ale unei topologii.

Definiția 1.1.5. Fie $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ cu $a < b$, $c < d$. Produsul cartezian $(a, b) \times (c, d) = \{(x, y) | x \in (a, b), y \in (c, d)\}$ se numește *interval bi-dimensional deschis*.

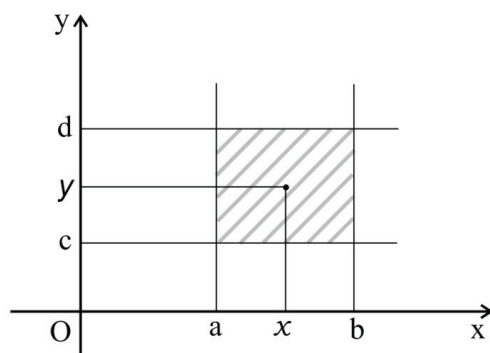


Figura 1.1

Mai general, în \mathbb{R}^n , pentru $a_i < b_i$, $a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}}$, $i = \overline{1, n}$, mulțimea $I_n = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$ se numește *interval deschis n-dimensional*.

Exemplul 1.1.6. Fie $X = \mathbb{R}^n$. Pe \mathbb{R}^n definim următoarea topologie τ : $A \in \tau$ dacă i) $A = \emptyset$ sau ii) dacă $A \neq \emptyset$, $\forall x \in A$, $\exists I_n$ (interval deschis n-dimensional) astfel încât $x \in I_n \subset A$.

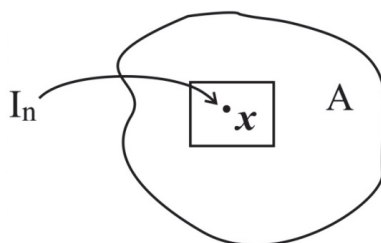


Figura 1.2

(τ se mai numește *topologia naturală* pe \mathbb{R}^n).

Exemplul 1.1.7. Fie $X \neq \emptyset, \tau = \{\emptyset, X\}$. Se verifică ușor că τ este o topologie, numită *topologia indiscretă* (sau *grosieră*) a lui X .

Exemplul 1.1.8. Fie $X \neq \emptyset, \tau = \mathcal{P}(X)$ (mulțimea părților lui X). Atunci τ este o topologie pe X , numită *topologia discretă* a lui X .

Observația 1.1.9. Din exemplele 1.1.7., 1.1.8. vedem că pe o mulțime dată putem construi mai multe topologii. În paragraful 1.6 vom vedea cum pot fi comparate două sau mai multe topologii pe aceeași mulțime.

Exemplul 1.1.10. Fie $X = \mathbb{N}$. Pe \mathbb{N} construim următoarea topologie τ : $A \in \tau$ dacă i) $A = \emptyset$ sau ii) dacă $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{N}$ atunci $\forall p \in A, p$ este număr prim; sau iii) $A = \mathbb{N}$.

Verificăm cele trei condiții de definiție a unei topologii:

1) $\emptyset, \mathbb{N} \in \tau$, din construcție;

2) Fie $(D_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \tau$. Dacă $\exists \alpha_0 \in I$ cu $D_{\alpha_0} = \mathbb{N}$, atunci $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = \mathbb{N} \in \tau$.

Dacă $\forall \alpha \in I, D_\alpha \neq \mathbb{N}$ atunci:

2.1. Dacă $\exists J \neq \emptyset, J \subset I$ astfel încât $\emptyset \neq D_\beta \neq \mathbb{N}, \forall \beta \in J$ și $D_\alpha = \emptyset, \forall \alpha \in I \setminus J$, atunci:

$$\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = \bigcup_{\beta \in J} D_\beta$$

și fiecare mulțime D_β este formată numai din numere prime, deci $\bigcup_{\beta \in J} D_\beta$ este

formată numai din numere prime. Rezultă atunci

$$\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = \bigcup_{\beta \in J} D_\beta \in \tau.$$

2.2. Dacă $D_\alpha = \emptyset, \forall \alpha \in I$ atunci $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = \emptyset \in \tau$.

3) Fie $A, B \in \tau$.

3.1. Dacă $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B \in \tau$;

3.2. Dacă $A \cap B \neq \emptyset$, distingem cazurile:

3.2.1. $A = B = \mathbb{N} \Rightarrow A \cap B = \mathbb{N} \in \tau$;

3.2.2. $A = \mathbb{N}, B \neq \mathbb{N} \Rightarrow A \cap B = B \in \tau$ (similar pentru $A \neq \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$);

3.2.3. $A, B \neq \mathbb{N}$, atunci $A \cap B$ va conține numerele prime comune lui A și B , deci $A \cap B \in \tau$.

Exemplul 1.1.11. Fie $X \neq \emptyset$. Definim pe X următoarea topologie τ : $A \in \tau$ dacă i) $A = \emptyset$ sau ii) dacă $A \neq \emptyset$, atunci $X \setminus A$ este finită sau vidă. Să probăm că τ este o topologie:

1) $\emptyset \in \tau$ (din construcție), iar dacă $A = X$, $X \setminus A = \emptyset$, deci $X \in \tau$;

2) Fie $(D_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \tau$. Dacă $\forall \alpha \in I, D_\alpha = \emptyset$, atunci $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = \emptyset \in \tau$. Dacă $\exists \alpha_0 \in I$ cu

$D_{\alpha_0} \neq \emptyset$, atunci $X \setminus D_{\alpha_0}$ este finită sau vidă; cum $X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha \right) \subset X \setminus D_{\alpha_0}$, deducem

că $X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha \right)$ este finită sau vidă, deci $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha \in \tau$.

3) Fie $A, B \in \tau$ cu $A \cap B \neq \emptyset$. Notăm cu CA (respectiv CB) mulțimile $X \setminus A$ (respectiv $X \setminus B$) adică complementarele lui A și B .

Avem că

$$C(A \cap B) = (CA) \cup (CB)$$

Dar $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, deci CA și CB sunt finite sau vide, deci $(CA) \cup (CB)$ este finită sau vidă. Obținem deci:

$$A \cap B \in \tau.$$

Definiția 1.1.12. Dacă $X \neq \emptyset$ și τ este o topologie pe X , atunci perechea (X, τ) se numește *spațiu topologic*.

Definiția 1.1.13. Fie (X, τ) un spațiu topologic.

a) Fie $x \in X, V \subset X$ spunem că V este o *vecinătate a lui x* dacă $\exists D \in \tau$ cu $x \in D \subset V$.

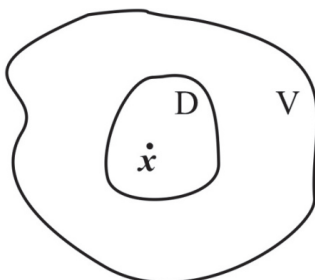


Figura 1.3

Mulțimea tuturor vecinătăților lui x se notează \mathcal{V}_x .

b) Fie $A \subset X$, $V \subset X$ spunem că V este o *vecinătate a lui A* dacă $\exists D \in \tau$ cu $A \subset D \subset V$. Vom nota cu \mathcal{V}_A mulțimea tuturor vecinătăților mulțimii A .

Teorema 1.1.14. Fie (X, τ) un spațiu topologic și $A \subset X$. Sunt echivalente afirmațiile:

- 1) $A \in \tau$;
- 2) $\forall x \in A, A \in \mathcal{V}_x$.

Demonstrație.

1) \Rightarrow 2) Cum $A \in \tau$, avem $x \in A \subset A$, deci $A \in \mathcal{V}_x$.

2) \Rightarrow 1) $\forall x \in A, \exists D_x \in \tau$ cu $x \in D_x \subset A$. Atunci, evident, $A = \bigcup_{x \in A} D_x$ și, din a doua condiție din definiția unei topologii, rezultă $A \in \tau$. ■

Observația 1.1.15. Teorema 1.1.14. afirmă că o mulțime nevidă este deschisă dacă și numai dacă este vecinătate pentru orice punct al său.

Definiția 1.1.16. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$, $x \in X$. Spunem că x este *punct interior* al mulțimii A dacă $A \in \mathcal{V}_x$.

Mulțimea $\mathring{A} = \{x \in X \mid x \text{ este punct interior al lui } A\}$ se numește *interiorul lui A*.

Propoziția 1.1.17. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $\emptyset \neq A \subset X$. Atunci $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$.

Demonstrație.

i) Fie $x \in \mathring{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists D_x \in \tau$ cu $x \in D_x \subset A \Rightarrow \mathring{A} \subset \bigcup_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$.

ii) Fie acum $x \in \bigcup_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$, deci $A \in \mathcal{V}_x$, de unde $x \in \mathring{A}$. Așadar $\bigcup_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D \subset \mathring{A}$. ■

Exemplul 1.1.18. Fie $X = \mathbb{R}$, τ topologia definită în exemplul 1.1.3. Fie $A = \{1\} \cup [2, 3)$. Să determinăm \mathring{A} .

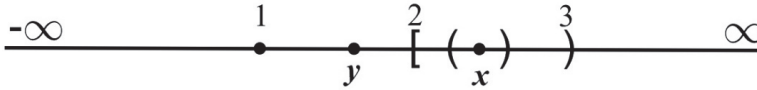


Figura 1.4

Pentru $x \in (2, 3)$, $\exists r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subset (2, 3)$. Rezultă $x \in (x-r, x+r) \subset (2, 3) \subset A$. Dar, din exemplul 1.1.3. rezultă că orice interval de tipul $(x-r, x+r) \in \tau$ (pentru că se poate conține pe el însuși!). Deducem că $A \in \mathcal{V}_x$, deci $x \in \mathring{A}$. Fie acum $x=2$ și vom proba că $2 \notin \mathring{A}$. Să presupunem prin absurd că $2 \in \mathring{A}$, deci $A \in \mathcal{V}_2$, adică $\exists D \in \tau$ cu $2 \in D \subset A$. Atunci, $\exists r > 0$ astfel încât $(2-r, 2+r) \subset D \subset A$ fals, deoarece $\forall y \in (1, 2)$, $y \notin A$. Așadar $2 \notin \mathring{A}$ și, analog, $1 \notin \mathring{A}$. Deducem că $\mathring{A} = (2, 3)$.

Exemplul 1.1.19. Fie $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Arătăm că $\mathring{A} = \emptyset$.

Să presupunem prin absurd că $\exists k \in \mathbb{N}^*$ cu $\frac{1}{k} \in \mathring{A}$, deci $A \in \mathcal{V}_{\frac{1}{k}}$; ca și în exemplul 1.1.18., ar rezulta că $\exists r > 0$ astfel încât $\left(\frac{1}{k} - r, \frac{1}{k} + r \right) \subset A$, ceea ce este fals, întrucât $\forall y \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right)$, $y \notin A$.

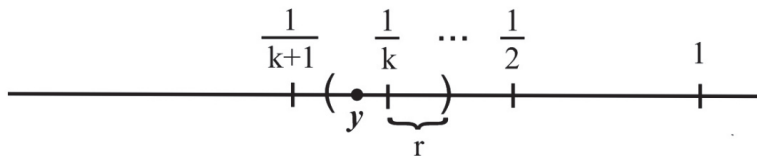


Figura 1.5