Marginile unei mulţimi

1. *Să se determine:*

i) $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ *şi* $\sup\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\right\}$*;*

ii) $\inf\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\ m < 2n\}$ *şi* $\sup\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}, m < 2n\}$*;*

iii) $\inf\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ *şi* $\sup\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soluţie.

i) Deoarece $0 \leq \frac{m}{1+m+n}$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x > 0$ minorant al mulţimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $x < \frac{1}{n+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{1}{x} - 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Deoarece $\frac{m}{1+m+n} \leq 1$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 1$ majorant al mulţimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $\frac{n}{n+2} < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{2x}{1-x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n \in \mathbb{N}\} = 1$.

ii) Deoarece $0 \leq \frac{m}{n}$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, $m < 2n$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\ m < 2n\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x > 0$ minorant al mulţimii $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\ m < 2n\}$, deducem că $x < \frac{1}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{1}{x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\inf\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}, m < 2n\} = 0$.

Deoarece $\frac{m}{n} \leq 2$ pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, $m < 2n$, tragem concluzia că 2 este majorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\ m < 2n\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 2$ majorant al mulţimii $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\ m < 2n\}$, deducem că $\frac{2n-1}{n} < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{1}{2-x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\sup\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}, m < 2n\} = 2$.

iii) Deoarece $0 = \sqrt{1} - [\sqrt{1}] \leq \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este un minorant pentru mulţimea $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ care face parte din mulţime, deci

$\inf\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\} = \min\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Deoarece $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulţimea $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 1$ majorant al mulţimii $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $\sqrt{n^2+2n} - [\sqrt{n^2+2n}] < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{x^2}{2(1-x)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\sup\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$.

2. *Fie A, B două submulţimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $a \leq b$. Să se arate că* $\sup A \leq \sup B$.

Soluţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\sup B < \sup A$. Atunci $\sup B$ nu este majorant pentru mulţimea A, deci există $a \in A$ astfel încât $\sup B < a$. Însă, conform ipotezei, există $b \in B$ având proprietatea că $a \leq b$, de unde obţinem contradicţia următoare: $b \leq \sup B < a \leq b$. Aşadar $\sup A \leq \sup B$.

3. *Să se arate că inegalitatea* $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$ *este valabilă pentru orice $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, A mărginită.*

Soluţie. Deoarece $x \leq \sup A$ pentru orice $x \in A$ şi $B \subseteq A$, deducem că $\sup A$ este majorant pentru B, deci, cum $\sup B$ este cel mai mic majorant al lui B, obţinem că $\sup B \leq \sup A$.

Similar se arată că $\inf A \leq \inf B$.

4. *Să se arate că dacă A* şi *B sunt submulţimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$, atunci* $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Soluţie. Conform exerciţiului precedent $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ şi $\sup B \leq \sup(A \cup B)$, deci $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\max\{\sup A, \sup B\} < \sup(A \cup B)$. Atunci, cum $\sup(A \cup B)$ este cel mai mic majorant al lui $A \cup B$, deducem că $\max\{\sup A, \sup B\}$ nu este majorant al mulţimii $A \cup B$, deci există $x_0 \in A \cup B$ astfel încât $\max\{\sup A, \sup B\} < x_0$. Fără pierderea generalităţii, putem presupune că $x_0 \in A$, ceea ce conduce la următoarea contradicţie: $x_0 \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\} < x_0$.

Aşadar $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Similar se arată că $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B)$.

5. *Pentru X şi Y două mulţimi nevide şi $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită, fie $f_1 : X \to \mathbb{R}$ şi $f_2 : Y \to \mathbb{R}$ date de* $f_1(x) = \sup\{f(x, y) \mid y \in Y\}$ *pentru orice $x \in X$ şi* $f_2(y) = \sup\{f(x, y) \mid x \in X\}$ *pentru orice $y \in Y$. Să se arate că*

$$\sup\{f(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_1(x) \mid x \in X\} = \sup\{f_2(y) \mid y \in Y\},$$

i.e.

$$\sup_{x,y} f(x, y) = \sup_x \sup_y f(x, y) = \sup_y \sup_x f(x, y).$$

Soluţie. Fie $S = \sup\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Deoarece $f(x,y) \le S$ pentru orice $x \in X$ şi orice $y \in Y$, deducem că $f_1(x) = \sup\{f(x,y) \mid y \in Y\} \le S$ pentru orice $x \in X$, de unde $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} \le S$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < S$. Atunci, cum S este cel mai mic majorant al mulţimii $\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$, deducem că $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\}$ nu este majorant al acestei mulţimi, deci există $x_0 \in X$ şi $y_0 \in Y$ astfel încât $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < f(x_0,y_0)$. Atunci obţinem următoarea contradicţie: $f(x_0,y_0) \le \sup\{f(x_0,y) \mid y \in Y\} = f_1(x_0) \le \sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < f(x_0,y_0)$.

Aşadar $\sup\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_1(x) \mid x \in X\}$.

Similar se arată că $\sup\{f(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_2(y) \mid y \in Y\}$.

6. *Pentru X şi Y două mulţimi nevide şi $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită, fie $f_1 : X \to \mathbb{R}$ şi $g_2 : X \to \mathbb{R}$ date de $f_1(x) = \sup\{f(x,y) \mid y \in Y\}$ pentru orice $x \in X$ şi $g_2(y) = \inf\{f(x,y) \mid x \in X\}$ pentru orice $y \in Y$. Să se arate că*

$$\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\} \le \inf\{f_1(x) \mid x \in X\},$$

i.e.

$$\sup_y \inf_x f(x,y) \le \inf_x \sup_y f(x,y).$$

Să se arate că inegalitatea poate fi strictă.

Soluţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\} < \sup\{g_2(y) \mid y \in Y\}$.

Atunci, cum $\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\}$ este cel mai mic majorant al mulţimii $\{g_2(y) \mid y \in Y\}$, deducem că $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$ nu este majorant al acestei mulţimi, deci există $y_0 \in Y$ astfel încât $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\} < g_2(y_0)$. Cum $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$ este cel mai mare minorant al mulţimii $\{f_1(x) \mid x \in X\}$, deducem că $g_2(y_0)$ nu este minorant al acestei mulţimi, deci există $x_0 \in X$ astfel încât $f_1(x_0) < g_2(y_0)$. Obţinem astfel următoarea contradicţie: $f(x_0,y_0) \le f_1(x_0) = \sup\{f(x_0,y) \mid y \in Y\} < g_2(y_0) = \inf\{f(x,y_0) \mid x \in X\} \le f(x_0,y_0)$.

Pentru a ne convinge că inegalitatea poate fi strictă, putem considera funcţia $f : X \times X \to \mathbb{R}$ dată de $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$, unde X este o mulţime care are cel puţin două elemente, pentru care $\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\} = 0 < 1 = \inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$.

7. *Să se arate că într-un corp ordonat (i.e. un corp comutativ K împreună cu o relaţie de ordine compatibilă cu structura algebrică a sa – mai precis astfel încât: i) pentru orice $x, y, z, t \in K$ cu proprietatea că $x \le y$ şi $t \ge 0$, rezultă că $x + z \le y + z$ şi $xt \le yt$; ii) pentru orice $x \in K$ avem*

$x \geq 0$ sau $x \leq 0$) arhimedeean (i.e. pentru orice $x, y \in K$, $y > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x < ny$), Principiul intervalelor nevide închise incluse implică Axioma lui Cantor.

Soluţie. Fie A o submulţime nevidă şi majorată a lui K, b_1 un majorant al său şi a_1 un element care nu este majorant al lui A (dacă A are un unic element x, alegem $a_1 = x - 1$; în caz contrar, există două elemente x şi y din A, $x < y$ şi alegem $a_1 = x$).

În continuare vom defini un interval $[a_2, b_2]$ inclus în $[a_1, b_1]$ astfel:
$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], & \frac{a_1+b_1}{2} \text{ este majorant al lui } A \\ [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1], & \frac{a_1+b_1}{2} \text{nu este majorant al lui } A \end{cases}$.

Inductiv vom obţine un şir $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale nevide închise incluse astfel încât a_n nu este majorant al lui A, iar b_n este majorant al lui A, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să observăm că lungimea intervalului $[a_n, b_n]$ (adică $b_n - a_n$) este lungimea lui $[a_1, b_1]$ (adică $b_1 - a_1$) înmulţită cu $\frac{1}{2^n}$. Cu alte cuvinte

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \tag{1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Conform Principiului intervalelor nevide închise incluse, avem

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Vom arăta că $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ are un unic element.

Într-adevăr, dacă ar exista $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, $x < y$, atunci, având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_1 - a_1 < n_0(y - x)$. Cum $x, y \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, deducem că $y - x < b_{n_0} - a_{n_0} \overset{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0}$, deci $n_0(y - x) < b_1 - a_1$, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar există $x \in K$ cu proprietatea că

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Afirmaţia 1. *x este majorant al lui A.*

Justificarea afirmaţiei 1. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că x nu este majorant al lui A, atunci există $a \in A$ astfel încât $x < a$. Având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_1 - a_1 < n_0(a - x)$, de unde $b_{n_0} - x \leq b_{n_0} - a_{n_0} \overset{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0} < a - x$, deci $b_{n_0} < a$, ceea ce contrazice faptul că b_{n_0} este majorant al lui A.

Afirmaţia 2. *x este cel mai mic majorant al lui A.*

Justificarea afirmaţiei 2. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că x nu este cel mai mic majorant al lui A, atunci există $M \in K$ astfel încât $M < x$ şi M este majorant al lui A. Având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $b_1 - a_1 < n_0(x - M)$, de unde $x - a_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} \overset{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0} < x - M$, deci $M < a_{n_0}$. Prin urmare $u \leq M < a_{n_0}$ pentru orice $u \in A$, ceea ce conduce la contradicţia că a_{n_0} este majorant al lui A.

Din cele două afirmaţii deducem că x este marginea superioară a mulţimii A.

Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$

1. *Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.*

Soluţie. Se verifică imediat că f este o normă.

Pentru $n = 2$, $x = (1, 0)$ şi $y = (0, 1)$, avem $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, $\|x + y\|_1 = \|x - y\|_1 = 2$, deci identitatea paralelogramului nu este satisfăcută.

2. *Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$ pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.*

Soluţie. Se verifică imediat că f este o normă.

Pentru $n=2$, $x=(1, 1)$ şi $y=(1, 0)$, avem $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, $\|x+y\|_\infty = 2$ şi $\|x - y\|_\infty = 1$, deci identitatea paralelogramului nu este satisfăcută.

3. *Să se arate că există a şi b numere reale strict pozitive astfel încât $a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.*

Soluţie. Conform inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz, avem

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

i.e. $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|$ şi $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$, i.e. $\|x\| \leq \|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deci putem alege $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$ şi $b = 1$.

4. *Să se arate că există a şi b numere reale strict pozitive astfel încât $a\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b\|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.*

Soluţie. Avem $|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq n\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$, i.e. $\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$ şi $\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$, i.e. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deci putem alege $a = \frac{1}{n}$ şi $b = 1$.

5. *Este adevărat că $|x \cdot y| \leq \|x\|_1\|y\|_1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$? Dar că $|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty\|y\|_\infty$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$?*

Soluţie. Pe de o parte avem

$$|x\cdot y|=\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|\leq\max\{|y_1|,|y_2|,...,|y_n|\}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leq\sum_{i=1}^{n}|y_i|\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$

i.e. $|x\cdot y|\leq\|x\|_1\|y\|_1$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Pe de altă parte, pentru $x=y=(1,1,...,1)$, avem $|x\cdot y|=n$ şi $\|x\|_\infty=\|y\|_\infty=1$, deci inegalitatea $|x\cdot y|\leq\|x\|_\infty\|y\|_\infty$ este falsă.

6. *Dacă $x,y\in\mathbb{R}^n$, este adevărat că $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ dacă şi numai dacă există $c\geq 0$ astfel încât $x=cy$ sau $y=cx$?*

Soluţie. Avem

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\Leftrightarrow\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\|x\|^2+\|y\|^2+2x\cdot y=\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\Leftrightarrow x\cdot y=\|x\|\|y\|.$$

Dacă x şi y sunt nenuli, atunci ultima egalitate are loc dacă şi numai dacă există $c>0$ astfel încât $x=cy$.

7. *Dacă $x,y\in\mathbb{R}^n$, este adevărat că $\|x+y\|_\infty=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$ dacă şi numai dacă există $c\geq 0$ astfel încât $x=cy$ sau $y=cx$?*

Soluţie. Dacă există $c\geq 0$ astfel încât $x=cy$, atunci

$$\|x+y\|_\infty=\|x+cx\|_\infty=(1+c)\|x\|_\infty=\|x\|_\infty+c\|x\|_\infty=$$

$$=\|x\|_\infty+\|cx\|_\infty=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty.$$

Similar se arată că dacă există $c\geq 0$ astfel încât $y=cx$, atunci $\|x+y\|_\infty=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$.

Pentru $n=2$, $x=(1,0)$ şi $y=(1,-1)$, avem $\|x+y\|_\infty=\|(2,0)\|_\infty=2=1+1=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$, dar nu există $c\geq 0$ astfel încât $x=cy$ sau $y=cx$.

8. *Să se arate că dacă $x,y\in\mathbb{R}^n$, atunci $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ dacă şi numai dacă $x\cdot y=0$.*

Soluţie. Avem $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\Leftrightarrow\|x\|^2+\|y\|^2+x\cdot y+y\cdot x=\|x\|^2+\|y\|^2\Leftrightarrow 2x\cdot y=0\Leftrightarrow x\cdot y=0$.

ELEMENTE DE TOPOLOGIE

Analiza topologică a unei mulţimi

1. *Pentru o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$, fie $\overline{A}$ intersecţia tuturor submulţimilor închise ale lui $\mathbb{R}^n$ care conţin pe A. $\overline{A}$ se numeşte închiderea (sau aderenţa) lui A şi este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţime închisă care conţine pe A.*

Să se arate că:

i) $\overline{A}$ este o mulţime închisă.

ii) $A \subseteq \overline{A}$.

iiii) A este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$.

iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

v) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x,r) \cap A\} \neq \emptyset$, pentru orice $r > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset$, pentru orice vecinătate V a lui $x\}$.

vi) Dacă $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

vii) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

viii) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Este adevărat că dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$?

Soluţie.

i) Deoarece $\overline{A}$ este o intersecţie de mulţimi închise, ea este o mulţime închisă.

ii) Este imediat că $A \subseteq \bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F = \overline{A}$.

iii) "$\Rightarrow$" Dacă mulţimea A este închisă, atunci $\bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F \subseteq A$, deci $\overline{A} \subseteq A$. Prin urmare $\overline{A} = A$.

"$\Leftarrow$" Dacă $\overline{A} = A$, cum $\overline{A}$ este mulţime închisă, deducem că A este închisă.

iv) Decurge din i) şi iii).

v) Vom demonstra incluziunea $\subseteq$.

Fie $x_0 \in \bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $x_0 \notin \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset$ pentru orice vecinătate V a lui $x\}$. Atunci există $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $V_0 \cap A = \emptyset$. Deoarece $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$, există $r_0 > 0$ cu proprietatea că $B(x_0, r_0) \subseteq V_0$, deci $B(x_0, r_0) \cap A = \emptyset$, i.e. $A \subseteq \mathbb{R}^n - B(x_0, r_0) \overset{not}{=} F_0$. Drept urmare, cum F_0 este închisă, obţinem $x_0 \in \bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F \subseteq F_0$, i.e. $x_0 \notin B(x_0, r_0)$, ceea ce constituie o contradicţie.

Acum vom demonstra incluziunea $\supseteq$.

Fie $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset$, pentru orice vecinătate V a lui $x\}$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $x_0 \notin \bigcap\limits_{A \subseteq F,\ F \text{ închisă}} F$. Atunci există F_0 mulţime închisă astfel încât $A \subseteq F_0$ şi $x_0 \notin F_0$. Prin urmare