Costel-Dobre CHITEŞ

STUDIUL MODULELOR COHEN-MACAULAY PESTE HIPERSUPRAFEŢE. NOI REZULTATE ÎN TEORIA CATEGORIILOR

PRO UNIVERSITARIA
2013
BUCUREŞTI

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
CHITEŞ, COSTEL
Studiul modulelor Cohen-Macaulay peste hipersuprafeţe : noi rezultate în teoria categoriilor /
Costel-Dobre Chiteş. - Bucureşti : Pro Universitaria, 2013
Bibliogr.
ISBN 978-606-647-566-2

514.7

INTRODUCERE

În prima secțiune a capitolului întâi sunt prezentate rezultate generale ale teoriei categoriilor. În secțiunea a doua a primului capitol este dată o versiune a teoremei lui Gabriel-Popescu.

Teorema Gabriel-Popescu arată apropierea unei categorii Grothendieck față de o categorie de module. Reamintim că pentru teorema Gabriel-Popescu se cunosc 3 demonstrații până în prezent.

Prima e dată de Gabriel-Popescu în C.R.Acad.Sci.Paris, a doua demonstrație este dată de M.Takeuchi în anul 1971 şi a treia demonstrație este dată de B.Mitchell, demonstrație ce se bazează pe un rezultat dat de Grothendieck A. în Tohöku Math.(1971). În lucrarea lui Grothendieck se demonstrează direct că o categorie Grothendieck are suficiente obiecte injective. Bazat pe acest rezultat, Mitchell prezintă o demonstrație foarte scurtă. Demonstrațiile precedente nu folosesc acest rezultat, dar în schimb acesta devine o consecință a teoremei lui Gabriel-Popescu.

În capitolul al doilea sunt prezentate rezultate clasice de algebră omologică (module proiective şi injective, rezoluții proiective şi injective, construcția functorilor derivați). Aceste rezultate sunt utilizate în capitolul următor pentru a defini şi studia proprietățile coomologiei Hochschild ale unei algebre peste un corp cu coeficienți într-un bimodul. Cu ajutorul coomologiei Hochschild se definesc algebrele separabile ca fiind acele algebre de dimensiune Hochschild zero. Sunt prezentate pe scurt proprietățile acestora cum ar fi spre exemplu teorema Zelinsky, în care se demonstrează că orice algebră separabilă este finit dimensională.

În partea a doua a tezei se studiază proprietăți omologice ale categoriilor $K-$liniare asemănătoare celor prezentate pentru cazul algebrelor asociative. Categoriile $K-$liniare pot fi privite ca generalizări naturale ale algebrelor asociative (algebrele asociative sunt categorii $K-$liniare cu un singur obiect). Aceste categorii joacă un rol extrem de important în numeroase domenii ale matematicii şi ale fizicii-matematice. Spre exemplu, categoriile $K-$liniare sunt importante în teoria reprezentărilor algebrelor finit dimensionale.

În capitolul al patrulea sunt prezentate noțiunile fundamentale ale teoriei categoriilor $K-$liniare (categoria (bi)modulelor peste o categorie $K-$liniară), precum şi unele construcții necesare în demonstrarea rezultatelor noastre. Din punct de vedere omologic, categoriile $K-$liniare şi algebrele asociative au proprietăți asemănătoare, foarte important fiind faptul că pentru orice categorie $K-$liniară categoria ei de module este abeliană şi are suficiente obiecte proiective şi injective. Acest lucru ne permite să aplicăm teoria functorilor derivați definiți pe categorii de module asociate unei categorii $K-$liniare. În particular se poate defini o teorie de coomologie analogă coomologiei Hochschild şi care în acest caz poartă numele de coomologia Hochschild-Mitchell.

În capitolul al cincilea sunt introduse, prin analogie cu cazul algebrelor asociative, categoriile $K-$liniare separabile. Prin definiție o categorie $K-$liniară este separabilă dacă coomologia sa Hochschild este trivială în grad pozitiv. Tot aici prezentăm o serie de caracterizări echivalente ale categoriilor $K-$liniare (Teorema 5.1) şi demonstrăm una dintre proprietățile importante ale acestora şi anume că ele sunt categorii local finite (analogul Teoremei Zelinsky pentru categorii $K-$liniare). Ca aplicații ale celor două rezultate amintite sunt studiate condiții necesare şi suficiente pentru ca liniarizata unui grupoid şi a unei categorii delta să fie separabilă. În cazul grupoizilor se obține o caracterizare a separabilității de tip Maschke iar în cazul unei categorii delta separabilitatea este echivalentă cu faptul că această categorie este discretă.

CAPITOLUL I

SECȚIUNEA 1 – PRELIMINARII

În acest capitol se prezintă rezultate clasice din teoria categoriilor şi în mod special din teoria categoriilor abeliene.

Presupunem cunoscute noțiunile de categorie, subcategorie, monomorfism, epimorfism, izomorfism, functori covarianți (contravarianți).

Vom prezenta câteva exemple de care vom avea nevoie în cele ce urmează.

1. Fie $\mathscr{C}$ o categorie şi A un obiect fixat din $\mathscr{C}$. Definim functorul covariant $h^A : \mathscr{C} \to Ens$ astfel:

Dacă M este un obiect din $\mathscr{C}$, $h^A(M) = Hom_{\mathrm{C}}(A, M)$, iar pentru un morfism $u : M \to N$ din $\mathscr{C}$, aplicația de la $h^A(M) \to h^A(N)$ este definită prin $h^A(u)(\xi) = u \circ \xi$, $\xi \in h^A(M)$.

Se defineşte functorul contravariant $h_A : \mathscr{C} \to Ens$ astfel: $h_A(M) = Hom_C(M, A)$, $h_A(u) : h_A(N) \to h_A(M)$ este aplicația $\varsigma \to \varsigma \circ u$, $\varsigma \in h_A(N)$.

2. Fie R un inel. ${}_R\mathscr{C}$ este categoria modulelor la stânga, $\mathscr{C}_R$ este categoria modulelor la dreapta peste inelul R. Functorul $T: \mathscr{C}_R \times {}_R\mathscr{C} \to Ab$, care asociază obiectului (M,N) din $\mathscr{C}_R \times {}_R\mathscr{C}$ grupul $T(M,N) = M \otimes_R N$ şi pentru un morfism (u,v) de la obiectul (M,N) în obiectul $(M^{'},N^{'})$, atunci $T(u,v) = u \otimes v$, numit functorul produs tensorial.

3. Fie R un inel, $A \in \mathscr{C}_R$ fixat. Functorul $T_A : {}_R\mathscr{C} \to Ab$, $T_A(X) = A \otimes_R X$, şi pentru un morfism de $R-$module $u: X \to Y$, $T_A(u) = 1_A \otimes u$. Acest functor se notează cu $A \otimes_R \cdot$

Analog, dacă B este un $R-$modul stâng fixat, se defineşte functorul $\cdot \otimes_R B$ de la categoria $\mathscr{C}_R$ în categoria Ab.

4. Fie $\varphi: R \to S$ un morfism de inele. Functorul $\varphi_* : {}_S\mathscr{C} \to {}_R\mathscr{C}$ ce asociază unui obiect $M \in {}_S\mathscr{C}$

$R-$modulul ce se obţine prin restricţia scalarilor, iar pentru un morfism $u: M \to N$ din ${}_S\mathscr{C}$, atunci $\varphi_*(u) = u$, se numeşte functorul restricţia scalarilor.

Compunerea functorilor

Se consideră categoriile $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ şi functorii $F: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $G: \mathscr{B} \to \mathscr{C}$. Functorul $H: \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ definit astfel: pentru un obiect M din $\mathscr{A}$, $H(M) = G(F(M))$, iar pentru un morfism

$u: M \to N$ din $\mathscr{A}$, $H(u) = G(F(u))$ se numeşte compunerea functorilor F şi G.

Morfism functorial

Se consideră două categorii $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ şi functorii covarianți $F, G: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. S-a dat un morfism functorial $\varphi: F \to G$ dacă pentru orice obiect din $\mathscr{C}$ s-a dat un morfism $\varphi(M): F(M) \to G(M)$ astfel încât dacă $u: M \to N$, următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{\varphi(M)} & G(M) \\ \downarrow F(u) & & \downarrow G(u) \\ F(N) & \xrightarrow{\varphi(N)} & G(N) \end{array}$$

Dacă pentru orice M din $\mathscr{C}$, $\varphi(M)$ este izomorfism, vom spune că φ este un izomorfism functorial. În acest caz vom scrie $F \simeq G$. Analog se defineşte morfismul functorial pentru functori contravarianți.

Compunerea morfismelor functoriale

Fiind dați trei functori F, G, H de la categoria $\mathscr{C}$ în $\mathscr{D}$ şi două morfisme functoriale $\varphi: F \to G$, $\psi: G \to H$. Pentru fiecare obiect $M \in \mathscr{C}$ definim morfismele $\theta(M) = \psi(M) \circ \varphi(M)$. Acestea definesc un morfism functorial $\theta: F \to H$, notat prin $\theta = \psi \circ \varphi$.